Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 7, стр. 451 – 454 *5 апреля 1974 г.*

ЗАМЕДЛЕННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ЗАТУХАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЛЫХ ТЕЛ ПРИ СВЕРХНИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Я.Б.Зельдович

Рассматриваются особенности затухания механических колебаний упругих тел при сверхнизких температурах.

Системы с большой добротностью представляют большой интерес для резонансной регистрации малых периодических сил. Роль добротности подчеркивает Брагинский [1].

Известно, что при понижении температуры затухание уменьшается [2, 3]. При этом для описания затухания пользуются макроскопическими понятиями теплопроводности и внутреннего трения (вязкости).

Отсюда следует, что если определенная мода колебаний возбуждена и энергия ее E во много раз больше тепловой энергии, то затухание происходит экспоненциально, dA/dt линейно зависит от A, где A амплитуда, dE/dt линейно зависит от E.

Однако, этот ответ основан на определенных предположениях, которые нарушаются для малых тел при низких температурах. Затухание данной моды (частота Ω) представляет собой переход энергии в другие моды. Следовательно происходит либо процесс спонтанного распада $\Omega \to \omega_i + \omega_k$, либо процесс $\Omega + \omega_i \to \omega_k$, при котором повышается частота тепловых колебаний.

Будем для определенности рассматривать низшую моду $\Omega = min(\omega_n)$, тогда распад исключен и остается лишь второй процесс. Предлагается рассматривать температуру такую, что $kT << \hbar\omega_i$ для всех подходящих пар ω_i, ω_k, удовлетворяющих условию

$$\omega_k - \omega_i = \Omega.$$

Если условие $kT << \hbar\omega_i$, выполнено, то заселенность i-й моды экспоненциально мала и соответственно мала вероятность диссипации моды Ω по данному каналу. В этом случае диссипация пойдет по более сложным путям типа $n\Omega + m\omega_i = l\omega_k$ или $n\Omega = q\omega_s + r\omega_t$, где n, m, l, q, r – целые. Пусть удалось удовлетворить выписанному условию с достаточно малым ω_i таким, что $\hbar\omega_k \approx kT$. Однако процесс в котором резонанс требует n квантов Ω приведет к затуханию по нелинейному, неэкспоненциальному закону $dE/dt = -bE^n$, с асимптотикой $E = [b(n-1)t]^{-(n-1)^{-1}}$ в пределе при больших t не зависящей от E_0.

Для численных оценок надо знать конкретный спектр рассматриваемого тела, а также что особенно трудно – ширину возбужденных мод.

Для тела объемом V при скорости звука c асимптотически плотность уровней $\frac{dN}{d\omega} \approx V\omega^2/c^3$. При данной добротности высших уровней a, т. е. при ширине их $\Gamma = \omega/a$ найдем то ω при котором с вероятностью порядка единицы имеет место $|\Omega + \omega_i - \omega_k| < \Gamma$.

Получим

$$\int \Gamma \frac{dN}{d\omega} dN = \int \Gamma \left(\frac{dN}{d\omega}\right)^2 d\omega = 1, \qquad \frac{V\omega^3}{c^3\sqrt{a}} = 1.$$

Следовательно средневзвешенная статистическая оценка дает номера первой пары уровней для которых возможен процесс первого порядка $N_i \approx N_k \approx \sqrt{a}$ и соответственно частоты $\omega_i \approx \omega_k \approx \Omega a^{1/6}$, где a добротность уровней i, k способных спонтанно распадаться (в отличие от Ω). В оценку вошла большая величина a, так что $\omega_i \cong \omega_k >> \Omega$. Следовательно наблюдение эффекта возможно также и при $\hbar\Omega < kT$. Однако степень 1/6 удручающе мала. С другой стороны, с описанной выше точки зрения затухание должно быть особенно сильным в том случае, когда имеет место эквидистантность спектра частот, например $\omega_{k+1} - \omega_k = \Omega$. Такой спектр имеет место например, для продольного звука в тонком (r) стержне согнутом в кольцо радиуса R (в пренебрежении дисперсией, $r << R$). Генерация гармоник в этом случае представляет собой образование ударных волн, превращение синусоидальной волны в пилообразную с последующим затуханием. Становится понятным, почему нарушение однородности по длине $2\pi R$ замедляет образование ударных волн: происходит порча эквидистантности спектра частот. Некоторое усиление эффекта возможно в вырожденном случае симметричного тела в котором имеют место правила отбора для взаимодействия колебаний. Например, при изотропном материале и сферическом теле сохранение момента означает (при Ω радиальном), что моды i и k должны иметь равными $l_i = l_k$, $m_i = m_k$. Это ограничение повысит степень a до $1/3$ или $1/4$ вместо $1/6$. Степень выше также для почти одномерного тонкого тела. Однако, в соответствии со сказанным выше, важно чтобы вырождение, ограничивающее число взаимодействующих уровней, не привело к эквидистантности типа $\omega_{i,l} = A_l + \Omega i$.

Для оценки затухания высших мод можно воспользоваться понятием внутреннего трения, кинематической вязкости и теплопроводности В этом случае $\Gamma = A\omega^2$, $a \sim \omega$. Фиксируя ω_i условием квантованности $\hbar\omega_i < kT$, получим $\Omega \approx \omega_i A^{1/6}$. Проведем весьма грубую численную оценку, основываясь на затухании колебаний сапфира $a = 10^9$, измеренном Багдасаровым, Брагинским и Митрофановым [4] при $\omega \sim 10^5$ и $T = 7°K$. Экстраполируем к $T = 10^{-3}$ по закону $A \sim T^{-4}$. Выбираем частоту $\omega_i = 10^9$ из условия $\hbar\omega_i = 10\,kT$. Получим $a = a_0 (10^5/10^9)(7/10^{-3})^4 = 10^{20}(!)$; $\Omega = a^{-1/6}\omega_i = 2 \cdot 10^6$. Надо подчеркнуть лишь, что в экзотических условиях, рассмотренных выше, время затухания весьма велико и в приближении внутреннего трения ($\sim 10^9$ лет), так что наблюдение эффекта треубет необычайного экспериментального искусства.

Выше было поставлено условие для точности резонанса. Если это условие не выполнено, $|\Omega + \omega_r - \omega_k| = \beta >> \Gamma_r + \Gamma_k$, то соответствующая пара уровней не дает вклад в затухание основной моды Ω, однако при возбужденных r, k модах возникнут биения амплитуды основной моды с частотой β. При времени наблюдения $\tau \lesssim \beta$ дополнительная трудность заключается в том, что нелегко отличить биения от затухания или воздействия внешней силы. При $T = 10^{-3}$ °K и скорости звука 10^6 *см/сек* (сапфир) условие $\hbar\Omega = kT$ для основного тона привело бы к необходимости взять шарик размером $3 \cdot 10^{-2}$ *см* однако благодаря тому, что $\omega_{i,k} >> \Omega$ не исключено, что описанные эффекты удастся наблюдать при размерах тела $0{,}5 \div 1$ *см*, а может быть и выше. Важнейшее значение приобретает при этом устранение потерь зависящих от подвеса тела, электронных и ядерноспиновых возбуждений. Амплитуда колебаний может быть не малой, поэтому квантовые эффекты, связанные с наблюдением колебаний (в принципе, по крайней мере) можно преодолеть.

Благодарю В.Б.Брагинского за обсуждения.

Поступила в редакцию
25 февраля 1974 г.

Литература

[1] В.Б.Брагинский. Физический эксперимент с пробными телами М., изд. Наука, 1970.

[2] А.И.Ахиезер. ЖЭТФ, 9, 13, 1938.

[3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория упругости, М., изд. Наука, 1965.

[4] Х.С.Багдасаров, В.Б.Брагинский, В.П.Митрофанов. Препринт ИТФ АН УССР №73-93 Е, 1973, Киев.